נושאים מתקדמים - אביב תשס"ח

חזרה על נושאים באותות אקראיים והתכנסותם.

1 תהליכים ומרחבי פונקציות

נזכר במושגים של מ"א: על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ אנו מגדירים מ"א, אשר יכולים לקבל ערכים ממשיים (כלומר במרחב האוקלידי $\mathbb{R}$), או וקטורים (כלומר הערכים הם במרחב האוקלידי ה-N ממדי $\mathbb{R}^N$). אפשר גם לחשוב על "מ"א" המקבלים ערכים במרחב של פונקציות - ואז הם תהליכים אקראיים. כדי שנוכל לדבר על קרובים של יצורים כאלו, יש צורך בהגדרות פורמליות של אוסף הערכים האפשרי.

השימושים והמודלים שלנגד עינינו הם במקרים רבים כאילו שהערכים האפשריים של הפונקציות הם בדידים: כך למשל אורכי תורים, כספים אם הם מנוהלים בדיוק סופי וכד'. במצב כזה ברור שכל פונקצית מדגם היא או קבועה, או משתנה בקפיצות. לעומת זאת, הגבולות של הקרובים יהיו בדרך כלל רציפים. לכך משמעות רבה לבחירת המרחבים בהם נשתמש.

1.1 מרחבי פונקציות

נשתמש בסימונים המקובלים הבאים:

הגדרה 1.1 $D\{[a,b],\mathbb{R}\}$ הוא אוסף הפונקציות עם ערכים ממשיים על הקטע $[a,b]$, אשר הן רציפות מימין, כלומר

$$\lim_{s\downarrow t} x(s) = x(t) \tag{1.1}$$

ובעלות גבולות משמאל, כלומר הגבול

$$\lim_{s\uparrow t} x(s) \tag{1.2}$$

קיים (אך לא חייב להיות שווה לערך הפונקציה בנקודה t). בצורה דומה נגדיר $C\{[a,b],\mathbb{R}\}$ להיות אוסף הפונקציות הרציפות עם ערכים ממשיים על הקטע $[a,b]$. כמקרה פרטי, a, b יכולים להיות סופיים או אין-סופיים. הגדרה זו ניתן להכליל על ידי כך שנחליף את $\mathbb{R}$ במרחב אחר - של הערכים שהתהליך מקבל (למשל $\mathbb{R}^N$ או מרחב מופשט יותר).

הערה 1.2 למרות שלכאורה פונקציות ב- D יכולות להיות "פרועות" מאד, ניתן להראות כי לכל פונקציה כזו, מספר נקודות האי רציפות הוא לכל היותר בן מנייה.

כדי להגדיר מרחק (ובעזרתו להגדיר התכנסות), נגדיר נורמה על מרחבים אלו.

הגדרה 1.3 נורמת הסופרמום $sup\ norm$ של איבר באחד המרחבים האלו מוגדרת כך:

$$||x||_\infty \doteq \sup\{||x(t)|| : a \le t \le b\} \tag{1.3}$$

כאשר $||\cdot||$ היא נורמה על מרחב הערכים של התהליך ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{R}^N$ וכו').

המרחב $C\{[a,b],\mathbb{R}^N\}$ עם הנורמה $||\cdot||_\infty$ הוא מרחב ווקטורי לינארי, ספרבילי ושלם:

- לינארי - כלומר ניתן לחבר אברים ולהכפילם בקבוע
- ספרבילי - כלומר ניתן למצוא אוסף בן מנייה $\{x_i\}$ כך שלכל $x, \epsilon > 0$ קיים x_i כך ש-$||x - x_i||_\infty < \epsilon$

- שלם - אם $y_i,\ i=1,\ldots$ היא סדרת קושי, כלומר

$$\lim_{n,m\to\infty} ||y_n - y_m||_\infty = 0$$

אזי זוהי סדרה מתכנסת, כלומר קיים איבר y כך ש-

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_\infty = 0.$$

תכונות דומות (אך לא זהות!) יש למרחב $D\{[a,b],\mathbb{R}^N\}$: אם נשתמש עבורו בנורמה $||\cdot||_\infty$ נקבל מרחב ווקטורי לינארי שלם. אולם מרחב זה איננו ספרבילי, כי אוסף הפונקציות $\{\mathbf{1}_{\{t\le\alpha\}},\ a\le\alpha\le b\}$ אינו בן-מניה, והמרחק בין כל זוג פונקציות הוא 1. עובדת היות מרחב זה לא ספרבילי היא משמעותית מבחינה מתמטית (בין השאר משפיעה על תכונות של מידות הסתברות על מרחב זה), אולם אנו לא נטפל בנקודה זו.

לעיתים אנו עוסקים בפונקציות על אינטרוול זמן אינסופי (כלומר a או b הם אין סופיים), אולם הנורמה $||\cdot||_\infty$ אינה מתאימה. למשל (כאשר $b=\infty$) אוסף הפונקציות $x_n(t)=\mathbf{1}_{\{t>n\}}$ בבירור מתכנס (במובן כלשהו) לאפס - אולם המרחק של כל פונקציה כזו מפונקציית האפס (תחת נורמת הסופרמום) הוא 1. כדי לטפל במקרים כאלו הומצאה מטריקה אחרת.

הגדרה 1.4 נאמר כי $x_n \to x$ במובן של *Uniformly on Compacts: UOC* אם לכל N מתקיימת ההתכנסות במובן נורמת הסופרמום

$$\lim_{n\to\infty} x_n\mathbf{1}_{\{-N\le t\le N\}} = x\mathbf{1}_{\{-N\le t\le N\}}.$$

במילים אחרות, אם נגביל את הסדרה לאינטרוול חסום כלשהו, נקבל התכנסות בנורמת הסופרמום.
בצורה שקולה, התכנסות UOC היא התכנסות במטריקה הבאה:

$$d_u(x,y) \doteq \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N}\frac{||x-y||_{N,\infty}}{1+||x-y||_{N,\infty}} \tag{1.4}$$

כאשר

$$||x-y||_{N,\infty} \doteq \sup_{-N\le t\le N} ||x(t)-y(t)|| \tag{1.5}$$

היא נורמת הסופרמום של הפונקציות כאשר הן מוגבלות לקטע $[-N,N]$.

נשים לב כי כל מחובר בהגדרת המטריקה חסום על ידי 1, אך מצד שני המרחק בין שני אברים הוא אפס אם ורק אם הם שווים לפי נורמת הסופרמום (בדוק שהסדרה לעיל שאינה מתכנסת בנורמת הסופרמום, אכן מתכנסת במטריקה של UOC). קל לראות שהמטריקה עונה על הדרישה - התכנסות במטריקה זו שקולה להתכנסות בסופרמום על כל אינטרוול סופי.

הערה 1.5 מטריקה אחרת שניתן להגדיר על המרחב D נקראת המטריקה של סקורוחוד *(Skorohod metric)* או מטריקת J_1. במטריקה זו שתי פונקציות הן קרובות אם ניתן לבצע עיוות קטן של ציר הזמן של אחת מהן, כך שלאחריו הן תהיינה קרובות במטריקת הסופרמום. לדוגמה, ובהשוואה למטריקת הסופרמום,

$$||\mathbf{1}_{\{t\le\alpha\}} - \mathbf{1}_{\{t\le\alpha+\epsilon\}}||_{J_1} = \epsilon \qquad ||\mathbf{1}_{\{t\le\alpha\}} - \mathbf{1}_{\{t\le\alpha+\epsilon\}}||_\infty = 1. \tag{1.6}$$

תחת מטריקה זו D הוא שלם וספרבילי. אולם אם בודקים התכנסות כאשר הגבול הוא רציף, אזי התכנסויות בשתי המטריקות הן שקולות. מסיבה זו נסתפק בשימוש במטריקת הסופרמום (שהיא פשוטה יותר לשימוש).

1.2 קומפקטיות והתכנסות

קבוצה של ממשיים נקראת קומפקטית אם היא סגורה וחסומה. לכל אוסף מספרים בקבוצה כזו יש גבול, והוא נמצא בקבוצה. נגדיר תכונה מקבילה למרחבים כלליים יותר ונראה שימוש להוכחת התכנסות.

נזכר כי בעזרת נורמה (או מטריקה) אפשר להגדיר כדור פתוח:

$$B_\epsilon(x) = \{y : d(x,y) < \epsilon\}. \tag{1.7}$$

קבוצה נקראת פתוחה אם סביב כל נקודה בקבוצה יש כדור פתוח שכולו מוכל בקבוצה. קבוצה היא סגורה אם היא המשלים של קבוצה פתוחה. ניתן כעת שתי הגדרות שקולות של קומפקטיות במרחב מטרי.

הגדרה 1.6 קבוצה S נקראת קומפקטית אם עבור כל אוסף קבוצות פתוחות $\{O_\alpha\}$ המכסה את S (כלומר $S \subseteq \cup_\alpha O_\alpha$) קיים אוסף סופי של O_α אשר גם הוא מכסה את S.
קבוצה במרחב מטרי נקראת קומפקטית אם לכל סדרה (אין סופית) של אברים x_i בקבוצה, קיים איבר x בקבוצה וכן תת סדרה i_k כך ש- $\lim_{k\to\infty} x_{i_k} \to x$. קבוצה נקראת פרה-קומפקטית אם הסגור שלה קומפקטי, או בדרישה שקולה, אם תנאי הקומפקטיות מתקיים אך הגבול x אינו בהכרח איבר בקבוצה.

לעיתים נשתמש בטכניקה הבאה להוכחת התכנסות של סדרה $\{x_i\}$. בשלב ראשון נראה כי הסדרה (כאוסף אברים) מהווה קבוצה פרה קומפקטית. מכך נובע כי לכל תת סדרה יש תת-תת סדרה שהיא מתכנסת. בשלב שני נראה כי כל הגבולות האפשריים זהים. מכאן נובע כי x_i מתכנסת. כדי לראות זאת, נסמן את הגבול של תת הסדרות ב- x ונניח להוכחה בשלילה ש- x_i איננה מתכנסת. לכן בפרט היא איננה מתכנסת ל- x, ולכן קיימת תת סדרה $x_{i_1(k)}$ וקיים ϵ כך ש- $d(x_{i_1(k)}, x) > \epsilon$ לכל k. אולם בגלל הפרה קומפקטיות, לתת הסדרה $x_{i_1(k)}$ יש תת סדרה מתכנסת, שנסמנה ב- $x_{i_2(k)}$. כיוון שהראנו שכל תת סדרה אשר מתכנסת, בהכרח מתכנסת ל- x, קיבלנו סתירה.

הגדרה 1.7 מודולוס הרציפות של פונקציה ב- C הוא

$$w_x(\delta) \doteq \sup_{a\le s<t\le b,\, t-s<\delta} ||x(t) - x(s)||. \tag{1.8}$$

משפט 1.8 *[Ascoli-Arzela]* קבוצה S ב- $C[a,b]$ היא פרה קומפקטית תחת נורמת הסופרמום (a,b סופיים) אמ"מ מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$\sup_{x\in S} ||x(0)|| < \infty, \qquad \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{x\in S} w_x(\delta) = 0. \tag{1.9}$$

התנאי הראשון הוא חסימות, ויחד עם השני הוא גורר שיש חסם אחיד על כל הערכים של כל הפונקציות ב- S. התנאי השני נקרא uniform continuity.

2 מושגי התכנסות

נחזור על מושגי התכנסות למ"א ולתהליכים אקראיים ונקשר אותם למרחבי הפונקציות שהכרנו.

הגדרה 2.1 נאמר כי הסדרה (של מ"א או של תהליכים אקראיים) $\{x_n,\ n = 0,1,\dots\}$ מתכנסת לגבול x כאשר $n\to\infty$

1. בהסתברות 1 (או *w.p.1 = with probability 1* או *a.s. = almost surely*) אם

$$\mathbb{P}\{||x_n - x|| \to 0\} = 1 \tag{2.1}$$

2. בהסתברות אם לכל ϵ

$$\mathbb{P}\{||x_n - x|| > \epsilon\} \to 0 \tag{2.2}$$

3. ב- $L^p\left[\Omega \times \mathbb{R}^N\right]$ עבור $p \geq 1$ אם

$$\left[\int_a^b \mathbb{E}\,||x_n(t) - x(t)||^p\,dt\right]^{1/p} \to 0 \tag{2.3}$$

4. התכנסות חלשה אם לכל פונקציה רציפה וחסומה f

$$\mathbb{E}[f(x_n)] \to \mathbb{E}[f(x)] \tag{2.4}$$

הערה 2.2 אם הטווח של המ"א הוא מרחב מטרי (ולא מרחב עם נורמה), אזי בהגדרת התכנסות בהסתברות 1 ובהגדרת התכנסות בהסתברות יש להחליף את הנורמה במטריקה המתאימה. התכנסות ב- L^p מוגדרת כמובן רק למרחב עם נורמה, ואילו להגדרת התכנסות חלשה יש צורך רק במושג של רציפות.

הערה 2.3 בהגדרה של התכנסות חלשה, אם x_n, x הם מ"א אזי ברור מהי פונקציה רציפה וחסומה. אך בצורה דומה ניתן להגדיר פונקציה ממשית על אותות (על פונקציות) במרחבים C, D שהגדרנו. כיוון שיש לנו מטריקה, המושג של רציפות ברור. כיוון שלפונקציה ערכים ממשיים, חסימות היא במובן הרגיל. לפונקציה ממשית על מרחב מופשט קוראים פונקציונל. כיצד לבדוק התכנסות כזו נראה בהמשך.
אם x_n, x הם מ"א אזי התכנסות חלשה שקולה להתכנסות בהתפלגות, המוגדרת להיות התכנסות של פונקציות הפילוג בכל נקודת רציפות של הפילוג של הגבול. נשים לב כי ניתן להגדיר התכנסות חלשה גם אם המ"א אינם מוגדרים על אותו מרחב הסתברות - זוהי תכונה הקשורה רק לפילוגים.

קשרים בין התכנסויות:

משפט 2.4 אם x_n מתכנס בהסתברות 1 או ב- L^p אזי הוא מתכנס בהסתברות. אם x_n מתכנס בהסתברות אזי הוא מתכנס חלש. אם x_n מתכנס חלש ל- x ו- x אינו אקראי אזי x_n מתכנס ל- x בהסתברות.
אם x_n מתכנס חלש ל- x ו- $x_n - y_n$ מתכנס בהסתברות לאפס אזי y_n מתכנס חלש ל- x.

משפט 2.5 שתי מידות הסתברות P, Q הן זהות אם ורק אם

$$\int f\,dP = \int f\,dQ \tag{2.5}$$

לכל פונקציה רציפה וחסומה f. אם P, Q הן פונקציות הפילוג של מ"א (כולל במרחב מופשט!) X, Y אזי תנאי שקול הוא כי לכל f כנ"ל

$$\mathbb{E}\,f(X) = \mathbb{E}\,f(Y). \tag{2.6}$$

הערה 2.6 ניזכר כי עבור מ"א ממשיים מספיק לבדוק רק פונקציות שהן אקספוננט מדומה, כלומר $\mathbb{E}\,e^{j\alpha X} = \mathbb{E}\,e^{j\alpha Y}$ לכל α ממשי--כלומר הפונקציות האפייניות זהות. תוצאה דומה קיימת במרחבים כלליים יותר כאשר את αX נצטרך להחליף בפעולה של פונקציול לינארי על X.

ראינו כי להתכנסות יש קשר לקומפקטיות. מושג מקביל לקומפקטיות בהקשר של התכנסות חלשה הוא tightness.

הגדרה 2.7 מידת הסתברות P נקראת *tight* אם לכל ϵ קיימת קבוצה קומפקטית K כך ש-$P(K) > 1-\epsilon$. אוסף מידות הסתברות $\{P_\alpha\}$ נקרא *tight* (או *uniformly tight*) אם לכל ϵ קיימת קבוצה קומפקטית K כך ש-$P_\alpha(K) > 1-\epsilon$ לכל α.

משפט 2.8 במרחב מטרי שלם וספרבילי, כל מידת הסתברות היא *tight*.

נזכור כי C הוא שלם וספרבילי, אך D אינו ספרבילי.

תכונת ה- tightness היא סוג של פרה קומפקטיות, במובן הבא.

משפט 2.9 קבוצה שהיא *tight* היא פרה קומפקטית ביחס להתכנסות חלשה, כלומר לכל סידרה יש תת סדרה המתכנסת במובן של התכנסות חלשה.

דוגמה 2.10 יהיו x_n פונקציות ("תהליכים אקראיים דטרמיניסטיים") המקיימות את התנאים

$$x_n(t)=0,\ t\le 0\ or\ t>1/n,\ x_n(t)\ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_n(s)\,ds = 1. \tag{2.7}$$

אזי כל פילוג רב-ממדי מתכנס חלש לפונקציה שהיא זהותית אפס, אולם אין התכנסות חלשה שכן הסדרה אינה מתכנסת לפונקצית האפס במטריקה של C. אולם ניתן לקשר בין התכנסות של פילוגים רב ממדיים לבין התכנסות חלשה:

משפט 2.11 אם הפילוגים הרב ממדיים של $\{x_n\}$ מתכנסים לאלו של x ואם בנוסף האוסף $\{x_n\}$ הוא *tight* אזי $x_n \to x$ במובן של התכנסות חלשה.

התהליכים מהדוגמה הקודמת אינם tight משום שהשיפוע שלהם - ולכן מודולוס הרציפות - אינו חסום. לכן התכנסות הפילוגים הרב ממדיים אינה גוררת התכנסות חלשה.

דוגמה 2.12 יהיו ξ_n מ"א בת"ס עם תוחלת אפס ווריאנס σ^2. נגדיר תהליך

$$x_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left[(\xi_1+\ldots+\xi_{\lfloor nt\rfloor}) + (nt-\lfloor nt\rfloor)\xi_{\lfloor nt\rfloor+1}\right]\ . \tag{2.8}$$

זוהי אינטרפולציה לינארית של הסכומים החלקיים (המנורמלים). ממשפט הגבול המרכזי לווקטורים קל לראות שכל הפלוגים הרב ממדיים מתכנסים לפילוג של תנועת בראון סטנדרטית. ניתן להראות כי הסידרה היא *tight* ולכן נסיק התכנסות חלשה לתנועת בראון. משפט זה נקרא *Functional Central Limit Theorem - FCLT*

משפט 2.13 אם $x_n \to x$ במובן של התכנסות חלשה ו- h היא פונקציה רציפה אזי $h(x_n)$ מתכנס התכנסות חלשה ל- $h(x)$.

3 התכנסות של תוחלות

התכנסות בהסתברות 1 אינה גוררת התכנסות של התוחלת - יתכן שהתוחלת כלל אינה קיימת! אנו זקוקים לתוחלות בעיקר משום שפונקציות המחיר בבעיות שנכיר הן תוחלות. דוגמה אפיינית היא פונקציה מהצורה

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x_n(t))\,dt\right]\ . \tag{3.1}$$

נציג שני תנאים המבטיחים התכנסות התוחלת.

משפט 3.1 נניח שהמ"א x_n מתכנסים התכנסות חלשה (או בהסתברות או בהסתברות 1) ל- x.
1. *[Dominated Convergence]* אם קיים מ"א $y \geq 0$ כך ש- $|x_n| \leq y$ וכן $\mathbb{E}\, y < \infty$ אזי $\mathbb{E}\, x_n \to \mathbb{E}\, x$.
2. *[Monotone converngence]* אם x_n היא סידרה עולה של מ"א חיוביים אזי $\mathbb{E}\, x_n \to \mathbb{E}\, x$ כאשר הגבול יכול להיות אינסוף.

כך למשל נניח שפונקציית התועלת שלנו מוגדרת דרך (3.1) כאשר h היא רציפה וחסומה. לכן אם x_n מתכנס התכנסות חלשה ל- x אזי האינטגרל מתכנס חלש לאינטגרל של הגבול, כיוון שהאינטגרל מהווה פונקציה רציפה וחסומה (עם ערכים ממשיים) של $h(x(t))$. כיוון שהאינטגרנד דועך בקצה אקספוננציאלי, האינטגרל חסום בצורה אחידה לכל, נובע מכך כי n, ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x_n(t))\, dt\right] \to \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x(t))\, dt\right] . \tag{3.2}$$

הגדרה 3.2 האוסף $\{x_n\}$ נקרא אינטגרבילי במידה אחידה *uniformly integrable* אם

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_n \int_{\{|x_n|\geq\alpha\}} |x_n| d\,\mathbb{P} = 0 \tag{3.3}$$

ניתן לבדוק תכונה זו על ידי בדיקה של מומנטים. בצורה מדוייקת יותר

משפט 3.3 אם קיימת פונקציה f כך ש-

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \sup_\alpha f(x_\alpha) < \infty \tag{3.4}$$

אזי האוסף $\{x_\alpha\}$ הוא אינטגרבילי במידה אחידה.

משפט 3.4 אם המ"א x_n מתכנסים התכנסות חלשה (או בהסתברות או בהסתברות 1) ל- x והאוסף $\{x_n\}$ הוא *uniformly integrable* אזי $\mathbb{E}\, x_n \to \mathbb{E}\, x$.

הערה 3.5 המשפט האחרון משלים את משפט *2.4*, כי תחת תנאי המשפט האחרון, אם $x_n = y_n^p$ אזי (בגלל האינטגרביליות במידה אחידה) $y_n \to y$ ב- L^p.

לעיתים נוח לשנות לתהליך (או לסדרת תהליכים) את ציר הזמן. כדי לטפל בקרובים מסוג זה קיים המשפט הבא. נסמן ב- D_t את אוסף התהליכים ב- D המקיימים את התכונות הבאות.

$$D_t \doteq \{\phi \in D[a,b] : \phi(a) = a,\ \phi(b) = b,\ \phi \text{ non decreasing}\} \tag{3.5}$$

נסמן ב- $x \circ \phi$ את ההרכבה של שתי הפונקציות: $(x\circ\phi)(t) = x(\phi(t))$. נסמן התכנסות חלשה כל ידי חץ כפול: $x \Rightarrow x$.

משפט 3.6 יהיו $\phi_n \in D_t$ ו- $x_n \in D$ שתי סדרות של תהליכים כך שהזוגות מתכנסים התכנסות חלשה לגבול כלשהו, כלומר

$$(x_n, \phi_n) \Rightarrow (x, \phi). \tag{3.6}$$

אם מתקיים כי בהסתברות 1 הגבולות הם בעלי פונקציות מדגם רציפות, כלומר

$$\mathbb{P}(x \in C) = \mathbb{P}(\phi \in C) = 1 \tag{3.7}$$

אזי ההרכבה מתכנסת חלש להרכבה של הגבולות:

$$x_n \circ \phi_n \Rightarrow x \circ \phi. \tag{3.8}$$